



Lineare Gleichungssysteme (zwei Unbekannte) mit Parameter Übung

1. Für bestimmte Werte $a \in \mathbb{R}$ sind folgende Gleichungssysteme unlösbar. Geben Sie diese Werte an. •••

a) I) $3x = 3$
II) $ay = 2$

b) I) $x + y = a$
II) $2x + ay = 2$

c) I) $(a + 5)y = 2$
II) $2ax = 2$

d) I) $2x + ay = -4$
II) $ax + y = 1$

2. Prüfen Sie, ob es ein $b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt. •••

a) I) $-y = 0$
II) $(b - 1)x = 0$

b) I) $(b - 2)x + 3y = 3$
II) $10x + 5y = b - 3$

c) I) $(b + 1)x + (b - 1)y = 0$
II) $-2x + 2y = 1$

d) I) $2x + 3y = 4$
II) $bx + 6y = b + 1$

3. Nach der Regel von Cramer ist ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{l} \text{I) } ax + by = c \\ \text{II) } dx + ey = f \end{array}$$

genau dann eindeutig lösbar, wenn die Determinante $D = a \cdot e - b \cdot d$ ungleich Null ist. Entscheiden Sie mit Hilfe dieser Regel, für welche $k \in \mathbb{R}$ die Gleichungssysteme eine eindeutige Lösung besitzen. •••

a) I) $6x + 4y = 3$
II) $kx + 2y = 2$

b) I) $4x + ky = k$
II) $-kx + 4y = 2k$

4. Lösen Sie die linearen Gleichungssysteme in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{R}$. •••

a) I) $-kx + 2y = -5$
II) $kx - 4y = 7$

b) I) $x + 2y = 4$
II) $\frac{3}{2}x + ky = 8$

c) I) $2x - 3y = 4$
II) $ky = 0$

d) I) $x - 2y = 2$
II) $-2x + 4y = k$

e) I) $x + 2y = 2$
II) $ky = 0$

f) I) $kx - y = 2$
II) $-3x + 3y = -5$

g) I) $3x + ky = 7$
II) $x + y = 3$

h) I) $6kx + 2y = 8$
II) $3x + ky = 4$

Lineare Gleichungssysteme (zwei Unbekannte) mit Parameter

Lösung

1.

- a) Das Gleichungssystem ist unlösbar für $a = 0$.
- b) System unlösbar für $a = 2$.
- c) Für $a = -5$ und $a = 0$ gibt es keine Lösung.
- d) $L = \emptyset$ für $a = -\sqrt{2}$ und $a = \sqrt{2}$.

2.

- a) Für $b = 1$ ist die untere Zeile eine Nullzeile, damit existieren unendlich viele Lösungen. (Bemerkung: ein System, in dem die rechte Seite nur Nullen enthält, heißt **homogenes lineares Gleichungssystem**. Dieses besitzt immer mindestens eine Lösung.
- b) $3 \cdot \text{II}) - 5 \cdot \text{I})$ ergibt $(40 - 5b)x = 3b - 24$.
Für $b = 8$ sind beide Seiten Null und es existieren unendlich viele Lösungen.
- c) Zeile II) müsste ein Vielfaches von I) sein, was wegen der rechten Seite nicht möglich ist. Es gibt kein $b \in \mathbb{R}$, so dass unendlich viele Lösungen existieren.
- d) Es existiert kein b , damit beide Zeilen Vielfache sind.

3.

- a) $D = 6 \cdot 2 - 4 \cdot k$. Das LGS ist eindeutig lösbar, falls $k \neq 3$.
- b) $D = 16 + k^2$, diese Determinante ist für alle reellen k positiv, folglich ist das System für alle $k \in \mathbb{R}$ eindeutig lösbar.

4.

- | | |
|--|---|
| <p>a) Fall 1: $k = 0$
Keine Lösung
$L = \emptyset$</p> | <p>Fall 2: $k \neq 0$
Eine Lösung
$L = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ k \end{pmatrix}; -1 \right\}$</p> |
| <p>b) Fall 1: $k = 3$
Keine Lösung
$L = \emptyset$</p> | <p>Fall 2: $k \neq 3$
Eine Lösung
$L = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{4k-16}{k-3} \\ \frac{2}{k-3} \end{pmatrix} \right\}$</p> |
| <p>c) Fall 1: $k = 0$
Unendlich viele Lösungen
$L = \left\{ (x; y) \mid x = 2 + \frac{3}{2}y; y \in \mathbb{R} \right\}$</p> | <p>Fall 2: $k \neq 0$
Eine Lösung
$L = \{(2; 0)\}$</p> |
| <p>d) Fall 1: $k = -4$
Unendlich viele Lösungen
$L = \{(x; y) \mid x = 2 + 2y; y \in \mathbb{R}\}$</p> | <p>Fall 2: $k \neq -4$
Keine Lösung
$L = \emptyset$</p> |
| <p>e) Fall 1: $k = 0$
unendlich viele Lösungen
z.B. $L = \left\{ (x; y) \mid y = -\frac{1}{2}x + 1 \wedge x \in \mathbb{R} \right\}$</p> | <p>Fall 2: $k \neq 0$
$L = \{(2; 0)\}$</p> |
| <p>f) Fall 1: $k = 1$
Widerspruch
$L = \emptyset$</p> | <p>Fall 2: $k \neq 1$
$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3k-3 \end{pmatrix}; \frac{-5k+6}{3k-3} \right\}$</p> |

g) Fall 1: $k = 3$
Keine Lösung
 $L = \emptyset$

Fall 2: $k \neq 3$
Unendlich viele Lösungen
 $L = \left\{ \left(\frac{3k-7}{k-3}; -\frac{2}{k-3} \right) \right\}$

h) Fall 1: $k = -1$
Keine Lösung
 $L = \emptyset$

Fall 2: $k = 1$
Unendlich viele Lösungen
 $L = \left\{ (x; y) \mid x = \frac{4}{3} - \frac{1}{3}y; y \in \mathbb{R} \right\}$

Fall 3: $k \neq \pm 1$
Eine Lösung
 $L = \left\{ \left(\frac{4}{3(k+1)}; \frac{4}{k+1} \right) \right\}$